

DAC の妙技「MIX MODE」を デジタル信号処理の理論的視点から考える

著者：石井 聡

はじめに

アナログ・デバイスではナイキスト周波数を越えたところでも D/A コンバータ（以下 DAC）が十分な出力を得られるようにするために、図 1 のような一般的な出力のかたちではなく、図 2 のように DAC 出力をスイッチ（変調）する「MIX MODE」という機能を持つ製品があります。

これはいろいろな用途で使える機能と思いますが、このときの出力レベルは図 3 のような形になります。MIX MODE に対応している製品は以下のものがあります（一例）。

- AD9739
<http://www.analog.com/jp/AD9739>
- AD9747/46/45/43/41（AD9747 を代表。データシートは共有）
<http://www.analog.com/jp/AD9747>
- AD9783/81/80（AD9783 を代表。データシートは共有）
<http://www.analog.com/jp/AD9783>
- AD9789
<http://www.analog.com/jp/AD9789>

通常であれば DAC 出力は、図 3 のように 1.0 FS（サンプル周波数 f_s [Hz]）で出力レベルがゼロとなる sinc 関数になります。ところがこの MIX MODE では、なんと！そこで最大になります。この技術ノートでは、このカーブがどんな成り立ちで出来上がっているか、数式的にどのように表されるのかを考えてみます。

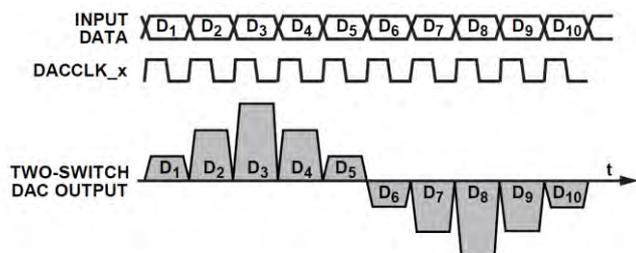


図 1. 一般的な DAC 出力のようす

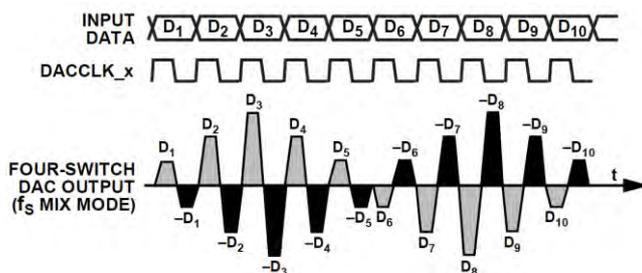


図 2. MIX MODE による DAC 出力スイッチのようす (AD9739)

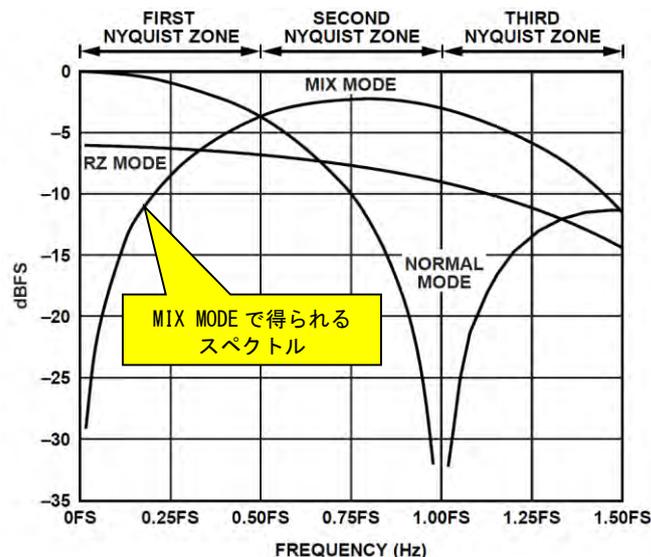


図 3. MIX MODE による出力レベルのようす (AD9739)

通常の DAC 出力レベルは sinc 関数上に乗っているとされるがホントにそうなるの？

まずは図 1 のような一般的な DAC 出力での、出力レベル対周波数特性がどうなるかを考えてみました。そういう私も、最初は各種文献での説明や、社内の技術資料などでも見つけることができず、「ホントにそうなるの？」という答えが出ず、だいぶ自問自答していたものです。実は図 4 から図 5 へのアイデアに考えが行きつくまでに、かなり時間がかかりました…。何年もと言ってもいいかもしれません。

DAC 出力レベルは周波数軸で sinc 関数上に乗る

以降にも詳しく示していきますが、DAC は出力周波数がサンプリング周波数 f_s [Hz] に近くなるにしたがい、出力レベルが小さくなります。この出力レベルは sinc 関数上に乗ると言われています。

正弦波で考える出力信号 $s(t)$ は、

$$s(t) = A \cos(2\pi ft) \times \text{sinc}(\pi f / f_s) \quad (1)$$

となり sinc 関数で出力レベルが低減していきます。ここで A は本来 DAC として出したい出力レベル、 f は周波数、 t は時間です。図 3 を見ても $0.25 \cdot f_s$ で -1dB 程度、 $0.5 \cdot f_s$ では -4dB 程度になることがわかります。まあ実際のところは $0.5 \cdot f_s$ 前後では折り返しのスペクトルも出てきますので、それをフィルタリングする必要があるなど、使いづらいこともあろうかと思いますが…。

アナログ・デバイス株式会社は、提供する情報が正確で信頼できるものであることを期していますが、その情報の利用に関して、あるいは利用によって生じる第三者の特許やその他の権利の侵害に関して一切の責任を負いません。また、アナログ・デバイス社の特許または特許の権利の使用を明示的または暗示的に許諾するものでもありません。仕様は、予告なく変更される場合があります。本紙記載の商標および登録商標は、それぞれの所有者の財産です。
©2015 Analog Devices, Inc. All right reserved.

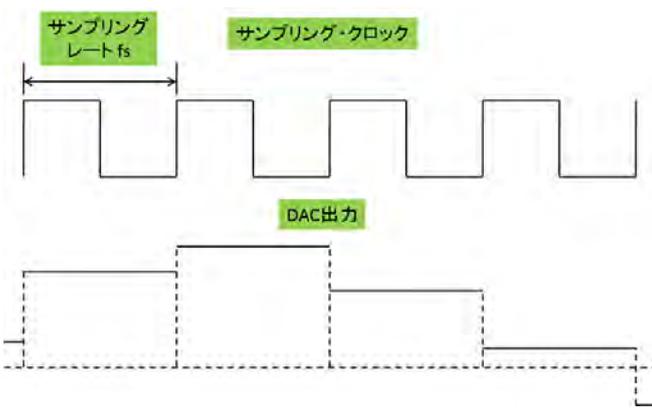


図 4. DAC 出力をそのまま表してみたようす (一般的・常識的な考え方)

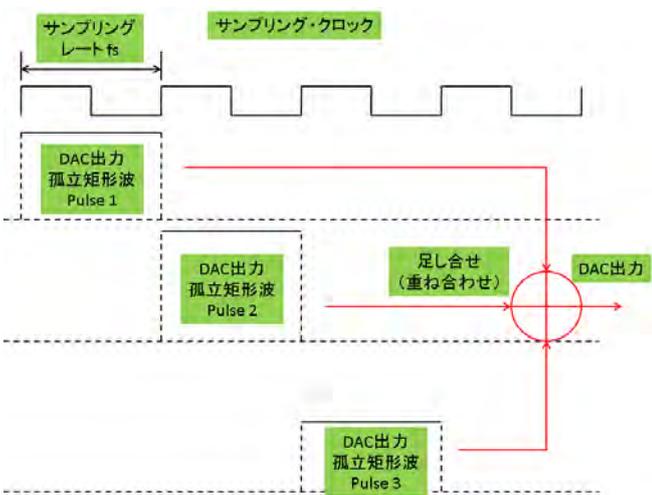


図 5. DAC 出力での連続矩形波のそれぞれは 1 サンプルごとの孤立矩形波として分割して考えることができる

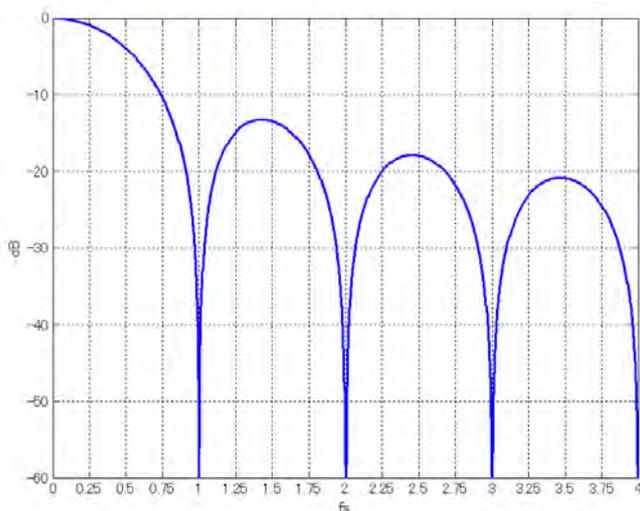


図 6. DAC 出力レベルは sinc 関数 (4 fs まで表示)。0.5 fs で出力すると -4dB 程度までレベルが減衰する

DAC 出力レベルはなぜ sinc 関数に乗るのか

DAC 出力を周波数軸で見ると、その出力レベルの変動が式(1)のように sinc 関数に乗ることは、どの文献でも書かれています。しかし sinc 関数としてのスペクトルは「孤立矩形パルスのフーリエ変換(周波数軸表現)」です…。DAC のように連続して出力する矩形波形(図 1 や図 2)は「ホントに孤立波での sinc 関

数の考え方を当てはめてしまっているの？当てはめることができるの？」とずっと思っていました。

また理論的な本に「パワー・スペクトルは、その連続信号の自己相関をとった波形をフーリエ変換したもの」という表現があり、矩形の連続波の自己相関は孤立三角波になります。ずっとこの理論的説明との関係がイメージできませんでした(実は計算すれば、これもつじつまがあっていた)。

孤立矩形波が連続して到来していると考えればいいんだ！

この「連続矩形波として発生する DAC 出力のスペクトルは、孤立矩形パルスの sinc 関数となぜ同じレベルになるのか？」については、図 5 のように、DAC 出力での連続矩形波のそれぞれは、実際は 1 サンプルごとの孤立矩形波として分割でき、それが $1/f_s$ [s] の時間ずつとして分離しているもの(孤立矩形波のパルスとして)連続的に到来している、と考えればよいことに気が付きました。

たとえばそれが 1Ω の抵抗に加わっているのであれば、その抵抗を熱するスペクトルとして考えてみれば、(DAC で得られるもともとの考えである)連続矩形波であっても、(ここで考える連続矩形波を孤立矩形波として個別に分割したという考えである)孤立矩形パルスの集合であっても、それぞれ同じなわけです。

そうすれば周波数スペクトル(スペアナなどで見てみると言うこと)は単純に波形ごとの足し算だとして見えるわけですから、結局は図 6 の sinc 関数が順々に足し合わされた形になります。つまり周波数スペクトル上では、sinc 関数の形状は「維持される」ということです。

この気づきに何年かかったことやら…。この気づきがあつてこそ、MIX MODE の波形がどう説明できるか「一石二鳥」が得られることになりました。

余談…「パワー・スペクトル」ってやっぱり電力の事ではないの？

ところで余談ですが、この「パワー・スペクトル」というのを「これは電力のことではなく、信号を二乗したという意味である」という記述を書籍などで見ることがあります。英語の Power は、電気では(ご存じのように)「電力」という意味ですが、数学的には「冪(べき)として n 乗する」という意味があります。「電力の事ではない」という記述は確かにそうかもしれませんが、 $P = V^2 / R$ で $R = 1\Omega$ とすれば(これは回路理論での検討でもよくやること)、結局は電力のことを言っているのではないかと常々私は思っています。英語がネイティブの学者さん(専門家)に聞いたわけではないので、真偽のほどは不明ですが…。

MIX MODE でチップを動作させるのは簡単

MIX MODE として DAC IC を動作させるためには、DAC に与えるデータ(DAC コード)に何か条件を被せる必要はありません。モードをノーマル・モードから MIX MODE のモードに切り替えるだけです。入力と同じでかまいませんが、それが図 2 のように、 $+1/-1$ に $1/f_s$ の「半分の時間」で切り替わる(変調される)ようになります。

そうすることで、ナイキスト周波数より上のところ(もしくは f_s に近いところ)の成分を、BPF を通して取り出して、それを増幅して信号として活用することができます。 f_s に近いところでも高いレベルが維持できますから、後段の動作効率を高くできます。アプリケーションはデジタル変調用途が主だと思えますが、いろいろ活用できそうです。

AD9739 は DOCSIS という仕様に最適化されている

AD9739 は CMTS (Cable Modem Termination System) の DOCSIS (Data Over Cable Service Interface Specifications)用に最適化されており、これらのベースバンド系の処理系も内蔵されています (ディスエーブルにしてバイパスも可能)。AD9789 はもっと汎用で、なんでも応用できるといえるでしょう。

この CMTS, DOCSIS というのは、あいにく弊社「半導体用語集」にも掲載されていない用語ですが、ケーブル・モデム終端装置に関する仕様です。

周波数スペクトルを実際に考える

DAC 出力は孤立矩形波で表現できることに気がついたわけですが、それが sinc 関数と実際にどのように関係しているかを示してみます。図 7 をご覧ください。事業部の担当者を探して「なんでこうなるの?」と質問して聞いてもいいのでしょうか、やはり (具合で!) 自力でやってみることにしました。

図 7 の左上は DAC に入力される (と仮定する) インパルス信号 $A\delta(t)$ です。 t は時間[s]、 A は信号の大きさです (DA 変換の値と考える)。これに同右上の DAC の矩形テンプレート (長さ $T_s = 1/f_s$) が「畳み込み (Convolution)」されます。このように DAC 出力というのは、デジタル信号処理で得られたインパルス信号に対して、「1 サンプル相当の矩形テンプレートを畳み込み」するものです。

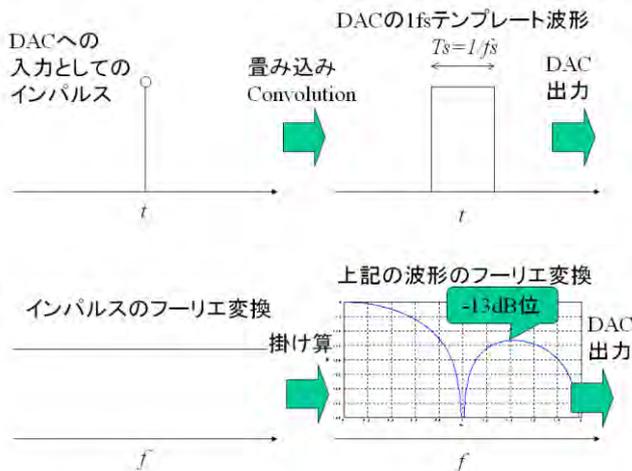


図 7. DAC 出力の時間信号波形とスペクトラムのようす

時間軸の畳み込みは周波数軸の掛け算

このようすを周波数上で表すと、図 7 左下のように入力インパルス信号は大きさ 1 の一定の周波数レスポンスです。これに同図右下の DAC の矩形テンプレートの周波数レスポンス (フーリエ変換した結果) が周波数軸上で「掛け算」されることになります。時間軸での畳み込みは周波数軸での掛け算に相当します。

周波数領域では単純に「掛け算」ですし、インパルスが周波数領域で $\delta(f) = 1$ (const) になっていますから、「1x」で掛けても掛けなくても一緒です。つまり DAC 出力の周波数特性としては、結局 sinc 関数となっていることになります。

なお、sinc 関数自体は電圧量や電流量に相当し、本来は電力で考える必要がありますから、 $20\log$ で dB とします。その結果、図 8 の sinc 関数のシミュレーション結果と AD9739 のデータシートの波形の形状 (図 3 の NORMAL MODE として示したものは目出度 (めでた) く同じになります。

ここまでくれば「MIX MODE のテンプレートがどうなるか? どのような周波数スペクトルか?」を考えればいだけで、あとは簡単 (?) です。

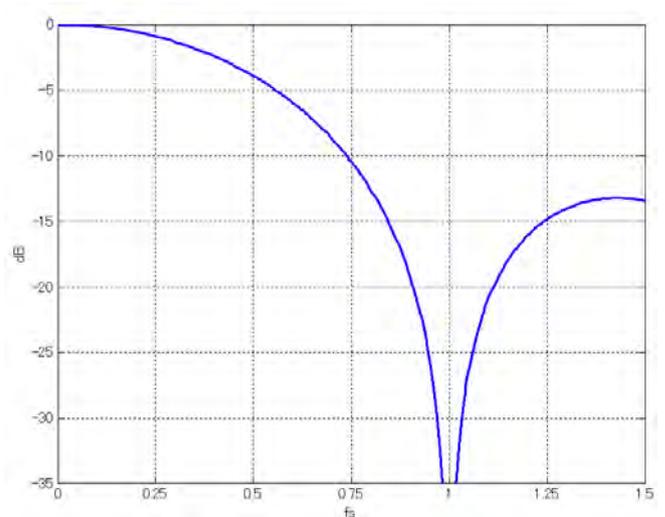


図 8. sinc 関数のようすを図 3 に合わせてシミュレーションしてみる。図 3 とぴったり同じ!

アナログ・エンジニアからの貴重なコメント

ここで非常に優秀なエンジニアの方からコメントをいただきました。その方のコメントを引用します。

『この話は、重ね合わせの定理が成り立つという事ですね。私の場合は DAC 出力の話ではないのですが、A/D 変換において、以下のような離散信号の式を見ることがあります。

$$X(nT) = \sum X(kT) \cdot \delta(nT - kT) \tag{2}$$

ここで k, n はサンプル番号に相当する整数で、 T はサンプリング周期です。これが良くわかりませんでした。暗記してしまえば簡単なのですが、式の意味するところを理解するため、考察を重ねました。

この式は「畳み込み」であるわけですが、たくさんの孤立パルスが集合したものとデルタ関数 ($\delta(t)$) を畳み込んだものが、サンプリングにより得られた信号だということです。でもこの式の表現はおかしくないか? と思ったわけです。正しくは、

$$X(t, n) = x(t) \cdot \delta(t - nT) \tag{3}$$

ここで $X(t, n)$ はサンプリングされたサンプル値で、 $x(t)$ はサンプリングされる連続時間信号です。掛け算ではないかと、こうではないかと…』

『 $X(t, n)$ が $X(n)$ でないことに注目してください。正しい数学上の表現では、サンプリングという行為は連続信号の関数です。つまり離散信号は連続信号の一種にすぎないのです。なぜならデルタ関数が連続信号の関数だからです。

そしてこの式から、時間連続で考えると、サンプル点の間には、ゼロが連続して存在しているようすを見ることができます。

これを「サンプル値」として考えなおせば $X(t)$ が $X(n)$ であるわけですが、意外とこの事 (連続時間で考えるべきこと) が本に書かれていません。離散信号も連続信号のひとつであるからこそ、フーリエ変換等の連続時間関数の算術が離散信号でも取り扱えるものだと思います』

このコメントはおっしゃるとおり!

この方が最初におっしゃる「重ね合わせの定理が成り立つ」…その定理なのだと、私もそこに辿りつきました。またこの方がご指摘の式、

$$X(nT) = \sum X(kT) \cdot \delta(nT - kT) \tag{前出(2)}$$

アナログ電子回路技術ノート

TNJ-014

については、「この式自体」は離散信号のデルタ関数との畳み込みです。しかしこの方がおっしゃるように「たしかに変では？」と思わせるものです。このことをステップを追って考えてみましょう。

サンプリングは「畳み込み」と本には書いてあるけれど？

畳み込みは 2 つの関数を逆方向から交らわせるように計算（掛け算）し、累積します。デルタ関数は離散信号の場合で $\delta(0) = 1$ 、連続時間の場合は $\delta(0) = \infty$ 、それ以外はゼロというものです。といっても離散信号同士だとデルタ関数との畳み込みはあまり意味がありません。

ここからがトリックなのですが、とある本では連続時間系として考えたサンプリングは、

$$X(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(nT_s - t) dt \quad (4)$$

という感じで、上記の式(2)を連続時間としての畳み込みで表現しています。ここで $f(t)$ は連続時間 t [s] における連続信号、 T_s はサンプリング周期[s]です。どうやらこれが間違いのようです。

「もっと簡潔に言ってくれれば」と思う宅技術者

(実は私は) 難しそうな本に書いてある「デルタ関数との畳み込みで連続信号を離散信号としてサンプリングする」といったような回りくどい説明は好きではありません（また以降に示すように実際は、それ自体の考え方自体に問題があります）。

アカデミックな分野の方々には「コイツわかってねーな」と言われそうですが、実際にはあまり意味の無い表現ではないか、またそれ以降は結局、領域でデジタル信号処理を延々表現していくだけだし、と思ったりしています。

アナログ・デバイセズの資料では

ところがこの話は、実際は式(2)のように A/D 変換のサンプリングというのは畳み込みではなく、式(3)のように「時間軸では連続信号 $f(t)$ とデルタ関数 $\delta(t)$ との掛け算」なのであります！たとえばアナログ・デバイセズのアプリケーション・ノート

[AN-756. Sampled Systems and the Effects of Clock Phase Noise and Jitter](#)

にも p. 2 に以下の記載があります。

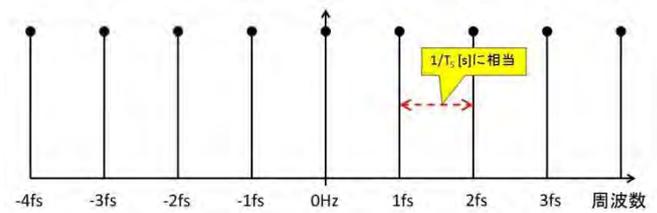
“While the sampling process can be considered a *multiplication* in time and *convolution* in the frequency domain,”

(convolution は畳み込みの意) アナログ・デバイセズの他の技術資料でも同じ説明を見た記憶がありますが、どこにあったかは見つけることができませんでした。

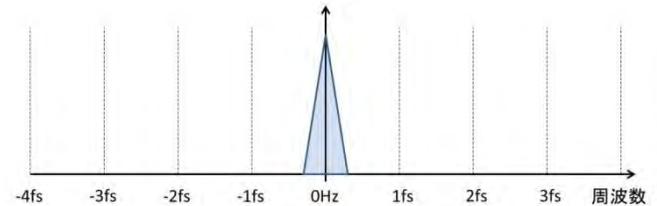
「A/D サンプリングは時間軸の掛け算」である事実を背理的に説明してみる

「A/D サンプリングは、時間軸では連続信号 $f(t)$ とデルタ関数 $\delta(t)$ との掛け算」であることを背理的に説明してみたいと思います。もし「時間軸では畳み込み」だとして考えてみると「周波数軸では一定繰り返しデルタ関数との掛け算」になります。

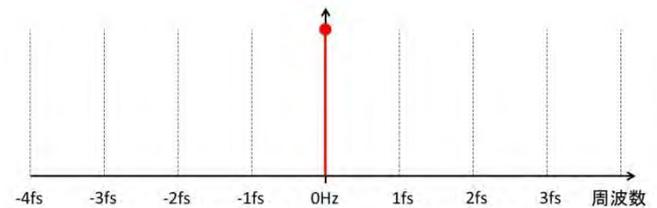
サンプリング動作として表される繰り返し周期 T_s [s] のデルタ関数は、ご存じのように図 9 (a) のように周波数軸では $1/T_s$ [Hz] ごとの繰り返し輝線スペクトル $\delta(f - N/T_s)$ となります。もしここに同図 (b) のようにサンプリングされる実時間連続信号が $s(f)$ という周波数スペクトルを持っていたとすると、これを周波数軸上で一定繰り返しのデルタ関数と掛け算したスペクトル [同図 (c)] は意味がないこと（つまり「時間軸ではデルタ関数との畳み込み」では無いこと）は簡単にご理解いただけると思います。これで背理的な説明がつかしました。



(a) 繰り返し周期 T_s [s] のデルタ関数は $1/T_s$ [Hz] ごとの繰り返し輝線スペクトル



(b) サンプリングされる実時間連続信号 $s(t)$ のスペクトル $s(f)$



(c) サンプリング動作は周波数軸での掛け算だとして考えたときに (b) をサンプリングしたスペクトル

図 9. サンプリングによるスペクトルを背理的に説明してみる。これだと正しい信号スペクトルが得られない

正しい形で得られるスペクトルとして説明してみる

一方であらためて「時間軸では連続信号 $f(t)$ とデルタ関数 $\delta(t)$ との掛け算」ということを「周波数軸では繰り返しデルタ関数との畳み込み」として作図してみると、図 10 のようになります。これを見ても、繰り返しデルタ関数に相当する、繰り返し輝線スペクトル $\delta(f - N/T_s)$ のそれぞれ N において、その輝線を中心として実時間連続信号 $s(t)$ の周波数スペクトル $s(f)$ が「よく教科書で見る形で」現れていることがわかります。さきに背理的に説明しましたが、ここでもそれが理解できるのではないのでしょうか。

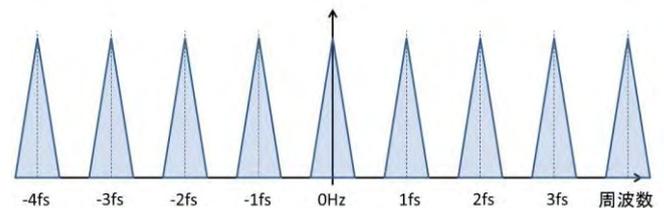


図 10. サンプリングによるスペクトルを「畳み込み」だとして、正しいかたちで得られるものとして説明してみる。正しい信号スペクトルが得られる

いよいよ！MIX MODE での周波数スペクトルはどうなる

さて話題を本題に戻してみましょう。「D/A 変換は時間軸では連続時間信号 $f(t)$ とテンプレート波形との畳み込み」そして「周波数軸では周波数スペクトル $s(f)$ とテンプレート波形との掛け算」だということを示してきました。

アナログ電子回路技術ノート

TNJ-014

これにより DAC 出力を「矩形パルスのテンプレート」として考えてきました（図 11 に再掲）。MIX MODE は図 11 の矩形パルスの幅が、図 12 のように 1/2 になった信号（矩形テンプレート）がふたつ、それも 1/4 だけ時間オフセットし、そして極性が土となる、というものの合成だといえます。

つまり幅 0.5、極性が土の矩形パルスにフーリエ変換の時間推移則をそれぞれあてはめて、足し算すればいいのですね！答えが合うといいです…。ホントにドキドキしてきました！（笑）。

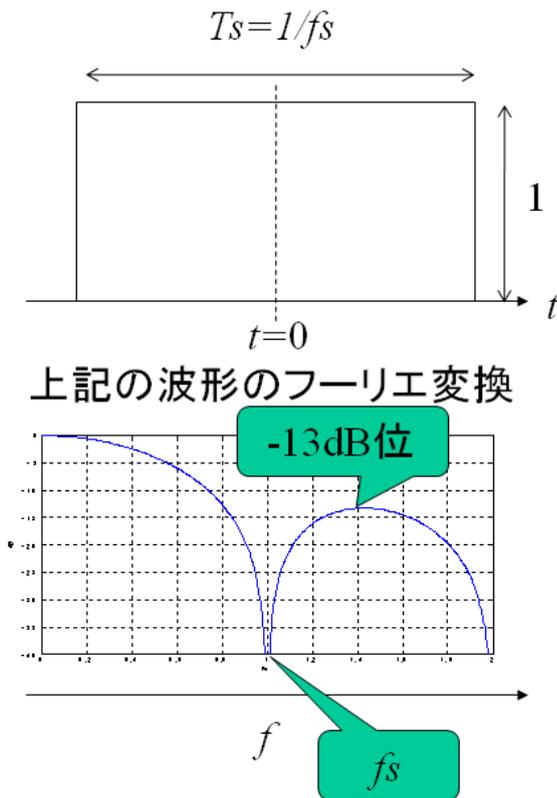
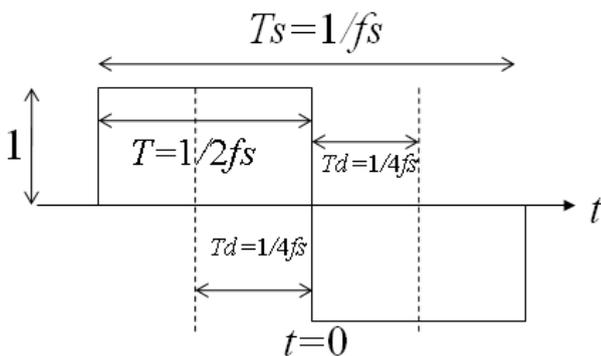


図 11. DAC の 1/fs テンプレート波形とフーリエ変換したもの



フーリエ変換すればよい

図 12. MIX MODE の 1/fs テンプレート波形

正しい形で得られるスペクトルとして説明してみる

最初に数式で計算してみました。この数式ベースでの思考結果は、この技術ノート後半に添付してある資料の第 1 節にまとめてみました。ぜひこちらをご覧ください。

この資料の式(7)で得られた結果を以下に示します。これは電圧値に相当しますので、これを 20log を取って電力量として dB に変換します。

$$S_{all}(\omega) = j \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T_s}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega T_s}{4}\right) \quad (5)$$

この式(5)を用いたシミュレーション結果をいよいよ図 13 に示します。AD9739 のデータシートの図（図 3 で示したもの）のスペクトルがそのまま、正しく得られていることがわかりました（よかった…）！

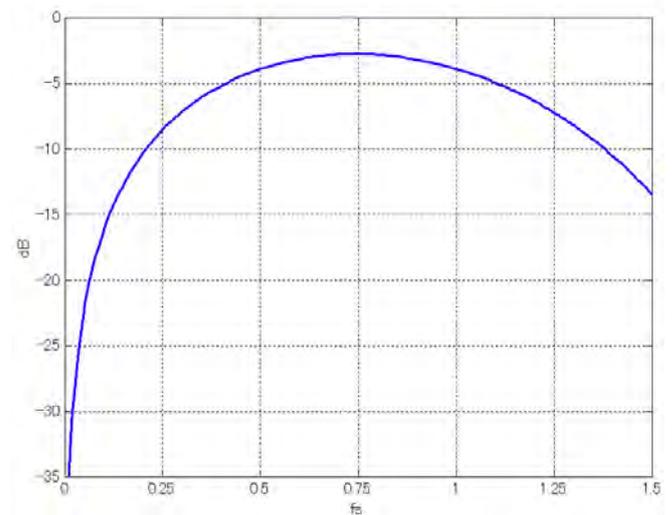


図 13. MIX MODE の周波数スペクトルのようすを図 3 に合わせてシミュレーションしてみる。図 3 とぴったり同じ！

この式(5)をベースとして考えていただければ、目的の周波数で MIX MODE で動かしたときに、どのくらいの出力が得られるかが厳密に判ります。この式(5)と最初にご紹介した MIX MODE が使える製品をご活用いただき、よりよい製品を市場に送り出していただけを願っております。

別のアナログ・エンジニアからの貴重なコメント（ラプラス変換でも計算できる）

なんとこれで本稿が終わりのような、エンド・ロールのようなカキイチでしたが、まだ続きます（汗）。

他の方からもこんなコメントをいただきました。『Super Nyquist DAC Sinc Roll-off については、以下のように、Zero-order Hold（ゼロ次ホールド）[1]に関するラプラス変換で計算可能ですよ』

ラプラス変換の推移則でテンプレート波形を考える

『最初にラプラス変換での推移則を示しておきます（これはフーリエ変換での推移則とほぼ同じものです）。

$$f(t - t_1)U(t - t_1) \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow e^{-t_1 s} F(s) \quad (6)$$

これは波形 $f(t)$ が時間が t_1 だけ遅延したもののラプラス変換は、 $f(t)$ をラプラス変換したものに、 $e^{-t_1 s}$ を掛けたのになるということです。 $U(t)$ はユニット・ステップ関数（ $t < 0$ でゼロ、 $t \geq 0$ で

アナログ電子回路技術ノート

TNJ-014

1)で、推移側で時間を t_1 だけずらしたときに t_1 以前の時間はゼロになる必要がある、ということを示しています。

さてここで $f(t)$ 自体はユニット・ステップ関数 $U(t)$ ($t < 0$ でゼロ、 $t \geq 0$ で 1)だとすると、それをラプラス変換したものは $1/s$ になります。式(6)中の $U(t)$ は有っても無くても同じになります』

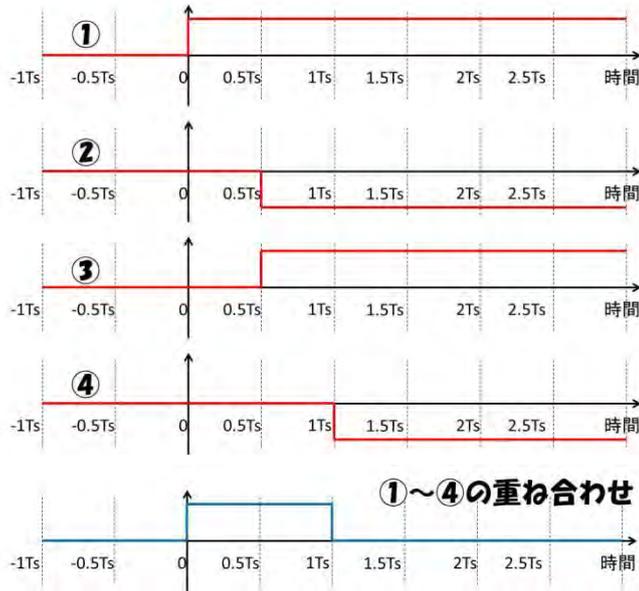


図 14. ラプラス変換で考える通常の DAC におけるテンプレート (Zero-order Hold, ゼロ次ホールド)

まずは通常の D/A 変換プロセスとして計算する

『通常の D/A 変換プロセスとして計算するには、図 14 のような信号①～④が重ねあわされたものを Zero-order Hold として考えます。ここでそれぞれの信号はユニット・ステップ関数 $U(t)$ です。

$$\textcircled{1} \quad U_0(t) \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \frac{1}{s} \quad (7)$$

$$\textcircled{2} \quad -U_1\left(t - \frac{T_s}{2}\right) \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow -\exp\left(-s\frac{T_s}{2}\right)\frac{1}{s} \quad (8)$$

$$\textcircled{3} \quad U_2\left(t - \frac{T_s}{2}\right) \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \exp\left(-s\frac{T_s}{2}\right)\frac{1}{s} \quad (9)$$

$$\textcircled{4} \quad -U_3(t - T_s) \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow -\exp(-sT_s)\frac{1}{s} \quad (10)$$

①と②で $T_s/2$ の前半の波を表し、③と④で $T_s/2$ の後半の波を表します。それを重ね合わせた結果として、通常の D/A 変換プロセスに相当する長さ T_s [s] のテンプレート (Zero-order Hold, ゼロ次ホールド) ができることになります。

実際には、①～④を足し合せて計算していきます。そうすると、

$$\frac{1}{s} \left[1 - \exp\left(-s\frac{T_s}{2}\right) + \exp\left(-s\frac{T_s}{2}\right) - \exp(-sT_s) \right] \quad (11)$$

となります (これ以降の導出をこの技術ノート後半に添付してある資料の第 2-1 節にまとめてみました)。

この結果 (添付資料の式(11)でも得られたもの) を以下に示します。

$$|S(\omega)| = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (12)$$

ここでは $T_s = 1$ に規格化しています。式(5)と同じことも分かります。これは電圧の絶対値に相当しますので、これを $20\log$ を取って dB に変換します。その結果として図 8 のスペクトルが得られます』

次に MIX MODE での変換プロセスとして計算する

『MIX MODE の D/A 変換プロセスとして計算するには、図 14 を少し変えた図 15 の①～④を足し合せて計算していきます。

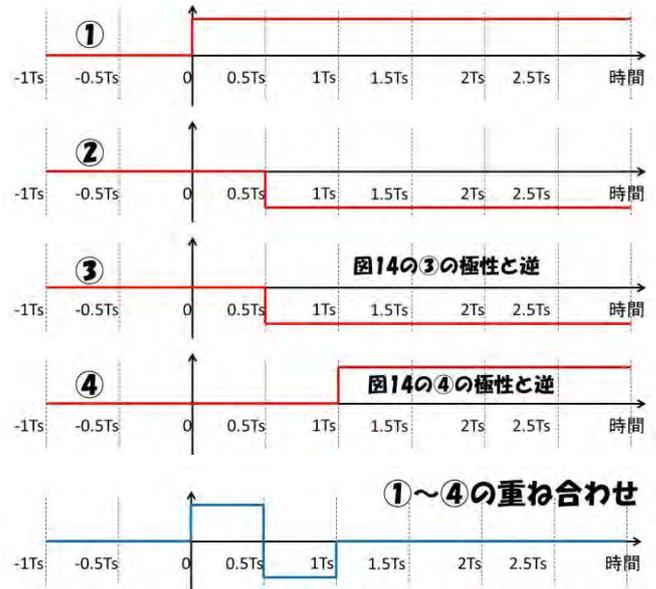


図 15. ラプラス変換で考える MIX MODE におけるテンプレート (Zero-order Hold, ゼロ次ホールド)

そうすると式(11)の 3 項目と 4 項目の符号が逆になり、

$$\frac{1}{s} \left[1 - \exp\left(-s\frac{T_s}{2}\right) - \exp\left(-s\frac{T_s}{2}\right) + \exp(-sT_s) \right] \quad (13)$$

となります (これもこの技術ノート後半に添付してある資料の第 2-2 節にまとめてみました)。

この結果 (添付資料の式(14)で得られたもの) を以下に示します。これは電圧の絶対値に相当しますので、これを $20\log$ を取って dB に変換します。

$$|S(\omega)| = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega}{4}\right) \quad (14)$$

DAC 出力の波形は、時間領域においては「時間分散量として D/A 変換 (再構成) されるアナログ信号量」と「Zero-order Hold (ゼロ次ホールド) のレスポンス」との畳み込みとみなすことができます。

従ってその周波数特性は「出力で再構成されるべきアナログ信号自体の周波数特性」と「Zero-order Hold の周波数特性」との積になります。

前者 (再構成されるアナログ信号) は、サンプリング周波数 (の整数倍) の周りにイメージが繰り返され、後者 (Zero-order Hold の周波数特性) は孤立波から得られる sinc 関数ですから、この結果として図 13 のスペクトルが得られます』

ゼロ次ホールド! ? 初めて知った!

なるほど…。この人も非常に優秀な方です。私はここで「Zero-order Hold」(ゼロ次ホールド) という用語を初めて知ったのでした。式を見ていくと、ユニット・ステップ関数を、ラプラス変換の推移則で足し算 (重ね合わせ) していくものと理解できます。

話は違いますが「スーパー・ナイキスト動作」

ちょっと MIX MODE とは話が違いますが、MIX MODE を使わずとも、ナイキスト周波数より上の周波数の信号を出力する目的の「スーパー・ナイキスト動作」というものがアナログ・デ

アナログ電子回路技術ノート

TNJ-014

バイセズの DAC や DDS で用意されています。以下はそのアプリケーション・ノートの一例です。

Ken Gentil; AN-939 高い周波数の RF 出力信号が得られる AD9912 のスーパー・ナイキスト動作, Analog Devies

ここで紹介されている AD9912 という DDS IC

<http://www.analog.com/jp/AD9912>

は MIX MODE で動作するものではありませんが、このようにナイキスト周波数を超えて、DDS の信号を活用することもできるわけです。

しかし MIX MODE での実際のスペクトルは？

MIX MODE では f_s の周波数で $+1/-1$ が繰り返し (チョッピング) します。 f_s が 2 倍にアップすると考えることができるわけです。 $f_s = 2.4\text{GHz}$ であれば、 $f_{sm} = 4.8\text{GHz}$ 相当で動作することになりますので、ナイキスト周波数も 2.4GHz にアップすると考えられるわけです。

「いや…、ちょっとまてよ…」 またここで疑問がもたげてくるわけです。「 $+1/-1$ が発生 (チョッピング) 」という点からすれば、それは信号の乗算動作です。 MIX MODE の動作として、ナイキスト周波数 ($f_{sm}/2 = 2.4\text{GHz}$ とする) に相当する周波数 $+1/-1$ の乗算 (チョッピング) が DAC 信号に行われれば、

$$\cos(\omega_1) \times \cos(\omega_2) = 1/2\cos(\omega_1) \pm 1/2\cos(\omega_2) \quad (15)$$

という関係から「DAC 出力信号の周波数は $f_{sm}/2 = 2.4\text{GHz}$ の周辺に \pm として出るのはではないか?」。つまり得られる周波数は

$$f_{out} = f_s(2.4\text{GHz}) \pm f_{baseband} \quad (16)$$

となるのではないかと!? こんな疑問が出てきます。これは正しい? 間違い? はて?

シミュレーションしてみれば分かることだが

実際の波形とスペクトルを確認するならば、MATLAB や SciLab (フリー) や Octave (GNU フリー)、もしくは EXCEL (FFT もできます) など FFT してシミュレーションで様子を確認してみることも一つかと思いますが、やっている時間もなく…。

色々資料を見ておりましたら、AD9739 のデータシートに MIX MODE 時の出力波形がありました (図 14)。これを見る限り、第 1 ナイキストの部分も発生しているようです。きっと、これと同じ (つまり式(16)は間違い) なのでしょう…。

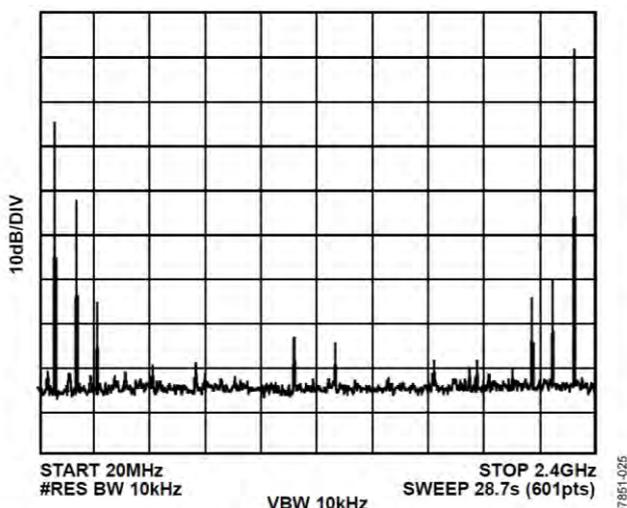


Figure 25. Single-Tone Spectrum at $f_{OUT} = 2.31\text{ GHz}$, $f_{DAC} = 2.4\text{ GSPS}$

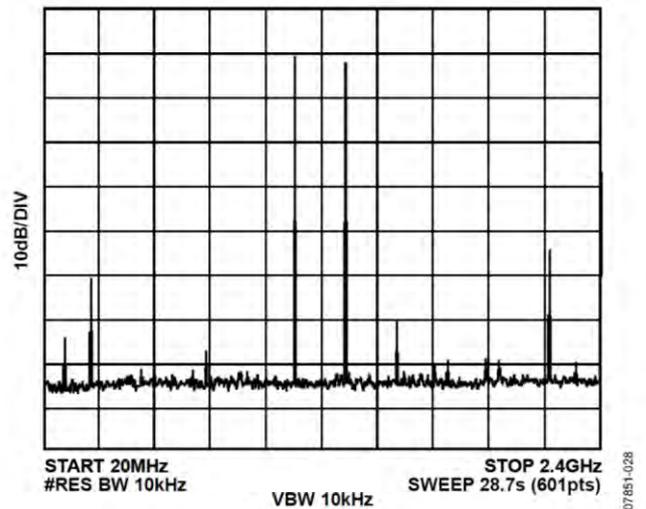


Figure 28. Single-Tone Spectrum in Mix Mode at $f_{OUT} = 1.31\text{ GHz}$, $f_{DAC} = 2.4\text{ GSPS}$

図 14. MIX MODE 時の出力波形

またもやいぶし銀のアナログ・エンジニアからの貴重なコメント

そこでまた、先の方からコメントをいただきました。

『MIX MODE 時の周波数特性については、このように考えれば良いのではないのでしょうか。周波数 f_0 の正弦波を出力したい場合、NORMAL MODE であれ MIX MODE であれ、出力スペクトルは周波数 f_0 の正弦波を f_s でサンプリングした離散情報と、DAC のゼロ次ホールド機能に起因する、あなた (私のことです) の言う「 $1/f_s$ テンプレート波形 (図 11 と図 12) 」との畳み込みになるだけです』

『だからね、周波数軸で見れば、 f_0 の正弦波のスペクトルと sinc 関数 Roll-off との積になるだけなんですね。両 MODE のスペクトルの相違はこの Roll-off 特性の違いによって発生するだけの話ですよ』

これで「開眼」です…。結局は MIX MODE であっても「NORMAL MODE と同じ周波数配置にしかならない」ということなんですね！

でも、よく考えてみれば「あたりまえ」の話だった

でも…、よく考えればこれは、ここまでの説明を良く思い返して考え直してみれば、その…、ここまでの説明で「説明がつく」話なわけでした。さらに式(16)は結局、もともとのスペクトルと「同じ」であったわけでした (汗……式を見間違えたとも言える)！普通の DAC での考え方と同じなわけで、 $f_s \pm f_{baseband}$ に折り返しが出ていることと同義、つまり「あたりまえ」な話なんですね (汗)。

「しかし MIX MODE は離散信号処理の妙技だなあ…」とあらためて超感心 (いえ、超感動です!) しました！連続時間ではこうは (当然ですが) ならないわけですしね。

こんな質問をいただきました「ナイキスト周波数ぴったりで信号出力した場合はどうなる？」

以降こんなご質問をいただきました。『AD9789 の MIX MODE を利用して $f_s = 2.4\text{GHz}$ の時、出力周波数を 1.2GHz で出力させる事は可能ですか? 同じく f_s の 0.5, 1, 1.5 倍の周波数に出力させる事は可能ですか?』

『単純に考えると、ちょうどナイキスト周波数なので、各ナイキスト帯域の信号が折り重なった形になってしまい、出力が出な

いのではないと思っています。 f_s を変更する等の方法が必要ですか?』

基本的な DAC 「でも」 対応可能

このお話は、MIX MODE でなくても、基本的な考え方で、 f_s ぴったり半分のレートでの信号発生は可能です。MIX MODE では、乗算した実波形は+1/-1 で切り替わるようになりますから、それから概略のスペクトルのレベルもイメージできます。

しかしそこから少し周波数がずれるだけで、 $f_s/2$ の左右にスペクトルが出るようになりますから、回路としての実装には注意が必要です。

ADC でのデジタル信号処理はどう考える?

DAC でのデジタル信号処理の場合は、時間軸では畳み込み、周波数軸では掛け算でしたが、「A/D コンバータ (ADC) の場合はどうなのだ?」と実はこれまで相当長く考えていました。

この話はこの技術ノートの中でもご紹介しましたが、ADC の場合は時間軸では掛け算です…。これは別途あらためて別の技術ノートで…。

参考文献

[1] Zero-order hold, http://en.wikipedia.org/wiki/Zero-order_hold, Wikiped

【資料】 MIX MODE の周波数スペクトル形状を 数式で求めてみる

アナログ・デバイス株式会社

1 フーリエ変換で考える

1.1 ふたつの孤立矩形波で考える

MIX MODE のスペクトル形状を検討するのに、テンプレート波形として考えてみます。
長さが $T_s/2 = 1/2f_s$ の 2 個の孤立矩形波 $b(t)$ で、それぞれ時間が $\pm T_s/4 = 1/4f_s$ だけ時間ズレした、
波形自体のピークも極性が逆のものを考えます。

まず時間長さが $T_s/2$ の孤立矩形波 $b(t)$ のフーリエ変換は、

$$B(\omega) = \frac{2 \sin \omega \frac{T_s}{4}}{\omega} = \frac{2 \frac{T_s}{4} \sin \omega \frac{T_s}{4}}{\omega \frac{T_s}{4}} = \frac{T_s}{2} \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega T_s}{4} \right) \quad (1)$$

になります。さらに波形が $\pm T_s/4$ だけ時間ズレしていますので、フーリエ変換の時間推移則

$$f(t - t_0) \Leftrightarrow F(\omega) e^{-j\omega t_0} \quad (2)$$

を使ってみます。 $t_0 = T_s/4$ ですから、MIX MODE テンプレート波形の左半分は $b(t + T_s/4)$ なので、

$$B(\omega) = \frac{T_s}{2} \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega T_s}{4} \right) e^{+j\omega T_s/4} \quad (3)$$

となります。テンプレート波形の右半分 $b(t - T_s/4)$ と一緒にしてみると、

$$\begin{aligned} S_{all}(\omega) &= \frac{T_s}{2} \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega T_s}{4} \right) e^{+j\omega T_s/4} - \frac{T_s}{2} \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega T_s}{4} \right) e^{-j\omega T_s/4} \\ &= \frac{T_s}{2} \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega T_s}{4} \right) (e^{+j\omega T_s/4} - e^{-j\omega T_s/4}) \end{aligned} \quad (4)$$

と計算できます。ここでオイラーの公式

$$\sin \theta = \frac{e^{+j\theta} - e^{-j\theta}}{j2} \quad (5)$$

を使うと

$$S_{all}(\omega) = \frac{T_S}{2} \text{sinc}\left(\frac{\omega T_S}{4}\right) \times j2 \sin \omega \frac{T_S}{4} \quad (6)$$

と計算できます。ここでフーリエ変換結果が $2j$ という虚数になっていますが、各周波数での位相が 90° ずれているのだと考えればいいでしょう。

1.2 スペクトルを計算し dB に換算するこの式を $T_S=1$ と規格化

してしまえば、

$$S_{all}(\omega) = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{\omega}{4}\right) \cdot j2 \sin \frac{\omega}{4} = j \text{sinc}\left(\frac{\omega}{4}\right) \sin \frac{\omega}{4} \quad (7)$$

とだいぶ簡単になりました。これが MIX MODE のスペクトルに対応するものになります。これは本文の図 11 のような、長さが $T_S=1/f_s=1$ の孤立矩形波の sinc 関数 $\text{sinc}(\omega/2)$ が 2 倍の帯域に広がったものと、周期 $\omega/4$ の sin 波形との掛け算になります (図 14)。

結果的にこの絶対値を

$$|S_{all}(\omega)| = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{4}\right) \sin \frac{\omega}{4} \quad (8)$$

として取り、 $20\log$ で dB に変換すれば、AD9739 のデータシートの図…つまり、答えが得られます。

2 ラプラス変換で考える

2.1 まずは通常の D/A 変換プロセスとして計算する本文中の「～を足し合せて」の式から

示していきます。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{s} \left[1 - \exp\left(-s\frac{T_S}{2}\right) + \exp\left(-s\frac{T_S}{2}\right) - \exp(-sT_S) \right] \\ &= \frac{1}{s} [1 - \exp(-sT_S)] = T_S \exp\left(-s\frac{T_S}{2}\right) \frac{\exp\left(+s\frac{T_S}{2}\right) - \exp\left(-s\frac{T_S}{2}\right)}{2\frac{sT_S}{2}} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで $s=j\omega$ としてみると、

$$\begin{aligned} &= T_S \exp\left(-j\omega\frac{T_S}{2}\right) \frac{\exp\left(+j\frac{\omega T_S}{2}\right) - \exp\left(-j\frac{\omega T_S}{2}\right)}{2j\frac{\omega T_S}{2}} \\ &= T_S \exp\left(-j\omega\frac{T_S}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{\omega T_S}{2}\right)}{\frac{\omega T_S}{2}} \\ &= T_S \exp\left(-j\omega\frac{T_S}{2}\right) \text{sinc}\left(\frac{\omega T_S}{2}\right) \end{aligned}$$

(10)

これらの絶対値は

$$|S(\omega)| = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (11)$$

となり、式 (8) と同じになります。ここでは $T_S = 1$ と規格化してあります。

2.2 次に MIX MODE での変換プロセスとして計算する

MIX MODE の D/A 変換プロセスを計算するため、本文中の図 15 の「～を足し合せて」の式から示していきます。上記の通常の D/A 変換プロセスとは、3 項目と 4 項目の符号が逆になります。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{s} \left[1 - \exp\left(-s\frac{T_S}{2}\right) - \exp\left(-s\frac{T_S}{2}\right) + \exp(-sT_S) \right] \\ &= \frac{1}{s} \left[1 - 2\exp\left(-s\frac{T_S}{2}\right) + \exp\left(-2s\frac{T_S}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{s} \left[1 - \exp\left(-s\frac{T_S}{2}\right) \right]^2 \\ &= \frac{\exp\left(-s\frac{T_S}{2}\right)}{s} \left[\exp\left(+s\frac{T_S}{2}\right)^{1/2} - \exp\left(-s\frac{T_S}{2}\right)^{1/2} \right]^2 \\ &= \frac{\exp\left(-s\frac{T_S}{2}\right)}{s} \left[\exp\left(+s\frac{T_S}{4}\right) - \exp\left(-s\frac{T_S}{4}\right) \right]^2 \end{aligned}$$

ここでも $s = j\omega$ としてみると、

$$= \frac{\exp\left(-j\omega\frac{T_S}{2}\right)}{j\omega} \left[\exp\left(+j\omega\frac{T_S}{4}\right) - \exp\left(-j\omega\frac{T_S}{4}\right) \right]^2$$

式が長くなってきたので $x = \omega T_S/2$ とおくと、

$$\begin{aligned} &= \frac{\exp(-jx)}{j\omega} \left[\exp\left(+j\frac{x}{2}\right) - \exp\left(-j\frac{x}{2}\right) \right] \cdot \left[\exp\left(+j\frac{x}{2}\right) - \exp\left(-j\frac{x}{2}\right) \right] \\ &= 4j^2 \frac{\exp(-jx)}{j\omega} \frac{\left[\exp\left(+j\frac{x}{2}\right) - \exp\left(-j\frac{x}{2}\right) \right]}{2j} \cdot \frac{\left[\exp\left(+j\frac{x}{2}\right) - \exp\left(-j\frac{x}{2}\right) \right]}{2j} \\ &= 2jT_S \frac{\exp(-jx)}{\omega T_S/2} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= jT_S \cdot \exp(-jx) \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x/2} \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) = jT_S \cdot \exp(-jx) \text{sinc}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

もとに戻すために $\omega T_S/2 = x$ とおくと、

$$= jT_S \cdot \exp\left(-j\frac{\omega T_S}{2}\right) \text{sinc}\left(\frac{\omega T_S}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega T_S}{4}\right)$$

(12)

2.3 スペクトルを計算し **dB** に換算するこの式を $T_s=1$ と規格化

してしまえば、

$$S(\omega) = j \exp\left(-j\frac{\omega}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega}{4}\right) \quad (13)$$

これの絶対値は

$$|S(\omega)| = \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega}{4}\right) \quad (14)$$

となり、式 (8) と同じになります。