

Appendix

2次遅れフィードバック系の位相余裕と ダンピング・ファクタ ζ とステップ応答の関係

アナログ・デバイス株式会社

1 この記事の目的

図1のような2次遅れの伝達系を考える。 A_{DC} はOPアンプのDCゲイン、 β は帰還回路の帰還率である。この系全体のゲインが1になる角周波数 ω_T （以下にも示すが「 T_1 で正規化された」かたちで）のときの位相遅れ ϕ_T を定義し、系を閉じて（InとOutを接続して）負帰還閉ループとする。

このとき位相遅れ ϕ_T から、位相余裕 ϕ_{PM} を $\phi_{PM} = \pi - \phi_T$ として求めることができる。また本稿のように計算していくことで、ダンピング・ファクタ ζ との関係も得ることができる。ダンピング・ファクタ ζ が分かれば、位相余裕 ϕ_{PM} ごとの系の時間応答（オーバーシュートのようす）がどうなるかを検討することができる。

2 2次遅れの伝達系のオープンループゲイン（一巡伝達関数）

図1の2次系における、それぞれの時定数を

$$T_1 = R_1 C_1, \quad T_2 = R_2 C_2 \quad (1)$$

とする。図1のオープンループゲイン（一巡伝達関数） $H_{OL}(s)$ は

$$H_{OL}(s) = \frac{1}{1 + sT_1} \cdot A_{DC} \cdot \frac{1}{1 + sT_2} \cdot \beta \quad (2)$$

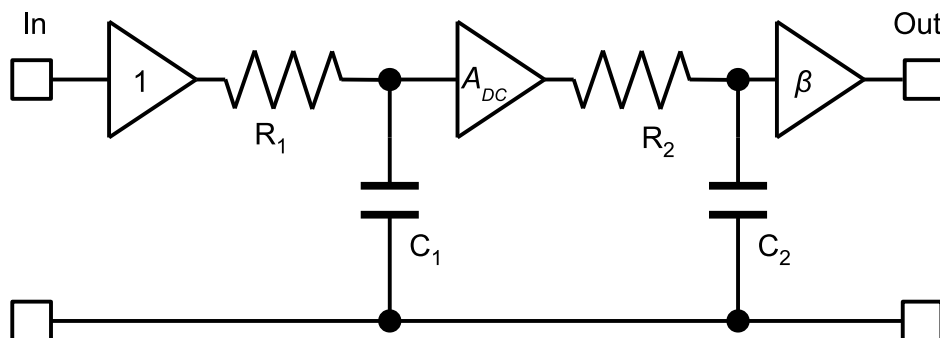


図1: 考えていく一巡伝達系。InとOutを閉じて帰還系とする。 T_1 と T_2 はバッファで分離されており、相互に影響が無い

になる。ここで OP アンプの系として考えれば、 A_{DC} は OP アンプの DC ゲイン、 T_1 は OP アンプ内部のポール（一般的に 1Hz 以下となる低い周波数の長い時定数）、 T_2 は OP アンプ外で形成される位相遅れ（高い周波数の短い時定数）、また β は（非反転増幅と考えれば）帰還量

$$\beta = \frac{R_a}{R_b + R_a} \quad (3)$$

となるので、この β は非反転増幅の増幅率 A_{CL} の逆数に相当する（ $A_{DC} = \infty$ と仮定したとき）。つまり

$$A_{CL} = \frac{R_b + R_a}{R_a} = \frac{1}{\beta} \quad (4)$$

3 2次系での位相遅れ量 ϕ のときの角周波数 ω を求める

式 (2) のオープンループゲインの周波数特性に関する部分（振幅と位相の変化成分）を取り出してみる。

$$H(s) = \frac{1}{1 + sT_1} \cdot \frac{1}{1 + sT_2} \quad (5)$$

定常状態のみを扱うので、この式を $s = j\omega$ としてしまう。つづいて図 1 の R_1, C_1 で形成される OP アンプ内部のポール T_1 を $T_1 = 1[\text{sec}]$ として正規化し、 T_1 と T_2 との比をスタガ比 k 、 $T_2 = T_1/k$ （ただし $k > 1$ ）と定義する。こうすると

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} \cdot \frac{1}{1 + j\omega/k} \quad (6)$$

この式から T_1 と T_2 の遅延要素から形成される、 T_1 で正規化された「任意の角周波数 ω での位相遅れ $\phi(\omega, k)$ 」を（ ω と k の関数として）求めることができる。

3.1 任意の正規化された角周波数 ω とスタガ比 k から位相遅れ量 ϕ を計算する

式 (6) では $T_2 = T_1/k$ であり、さらに $T_1 = 1$ と正規化していることから、 $T_2 = 1/k$ となり、

$$\phi(\omega, k) = -\tan^{-1}(\omega T_1) - \tan^{-1}(\omega T_2) = -\tan^{-1}(\omega) - \tan^{-1}(\omega/k) \quad (7)$$

となる。なお

$$\begin{aligned} \phi_1(\omega) &= -\tan^{-1}(\omega), \quad \phi_2(\omega, k) = -\tan^{-1}(\omega/k), \\ \phi(\omega, k) &= \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega, k) = -\tan^{-1}(\omega) - \tan^{-1}(\omega/k) \end{aligned} \quad (8)$$

とも書ける。ここで

$$\tan^{-1}(x) \pm \tan^{-1}(y) = -\tan^{-1} \frac{x \pm y}{1 \mp xy} \quad (9)$$

という公式を用いて

$$\phi(\omega, k) = -\tan^{-1}(\omega) - \tan^{-1}(\omega/k) = -\tan^{-1} \frac{k\omega + \omega}{k - \omega^2} = -\tan^{-1} \left(\frac{k+1}{k - \omega^2} \right) \omega \quad (10)$$

と変形する。なお $\phi(\omega, k)$ の大きさは (遅れ系なので) マイナスであり、あらたに「遅れ量」だとして、 $\phi(\omega, k) = -\phi(\omega, k)$ とすればマイナスが消え、さらに変形させると

$$\tan \phi(\omega, k) = \left(\frac{k+1}{k-\omega^2} \right) \omega \quad (11)$$

これから $\phi(\omega, k)$ は (式 (10) のとおり)

$$\phi(\omega, k) = \tan^{-1} \left(\frac{k+1}{k-\omega^2} \right) \omega \quad (12)$$

となり、これで任意の角周波数 ω での位相遅れ量 $\phi(\omega, k)$ を求めることができる。

3.2 こんどは逆に目的の位相遅れ量 ϕ とスタガ比 k が与えられたときの正規化された角周波数 ω を逆算する

これまでの式から、スタガ比 k と T_1 で正規化された角周波数 ω が与えられれば、そのときの位相遅れ量 $\phi(k, \omega)$ が得られることが分かった。

この式を変形していけば、スタガ比 k と希望する位相遅れ量 ϕ が与えられたとき、角周波数 $\omega(k, \phi)$ を求めることができる。式 (11) から角周波数 ω について解くと、

$$\begin{aligned} \tan \phi(k - \omega^2) &= (k+1)\omega \\ k \tan \phi - \omega^2 \tan \phi - (k+1)\omega &= 0 \\ \omega^2 + \frac{(k+1)\omega}{\tan \phi} - k &= 0 \end{aligned}$$

解の公式で、

$$\omega(k, \phi) = \frac{-\frac{k+1}{\tan \phi} \pm \sqrt{\left(\frac{k+1}{\tan \phi}\right)^2 + 4k}}{2} \quad (13)$$

これが OP アンプ内部のポールを $T_1 = 1[\text{sec}]$ で正規化し、スタガ比 k 、希望する位相遅れ量 ϕ が与えられたときの、その遅れ量 ϕ が得られる角周波数 ω になる。なお $\pm$ になっているが、マイナス側は ω が負になるので、これは使用しない。

3.3 これで位相が ϕ になる正規化された角周波数 ω が決まり、目的の計算の基礎が出来た

ここまで

角周波数 ω のときの 2 次遅れ系の位相遅れ量を ϕ として式を立てた

T_1 は $T_1 = 1[\text{sec}]$ と正規化し (これにより ω も正規化される)

スタガ比 k により、 $T_2 = T_1/k$ という関係を決め、それから ϕ について解くと、

スタガ比 k と T_1 で正規化された任意の角周波数 ω における位相遅れ量 ϕ を計算できた。

さらに ω について解くと、希望する位相遅れ量 ϕ が与えられたときの T_1 で正規化された角周波数 ω を求めることが出来た。

3.4 これからループの切れる角周波数 ω_T と位相 ϕ_T の関係が得られる

上記から、

$A_{DC}\beta H(\omega) = 1$ になるときの位相余裕を ϕ_{PM} とすれば、
位相余裕 ϕ_{PM} と全体の位相遅れ ϕ_T との関係は、 $\phi_{PM} = \pi - \phi_T$ となる。
希望する位相余裕 ϕ_{PM} を決め、そのときの位相遅れ量 ϕ_T から、
式 (13) で角周波数 $\omega(k, \phi_T)$ を求めることができ、スタガ比を k とすることで、
位相遅れが ϕ_T になるときの T_1 で正規化された 角周波数 ω_T を求めることができる。

4 ϕ_{PM} と ω_T から「後付け」でオープンループゲイン $A_{DC}\beta$ を設定すれば、 ダンピング・ファクタが計算できる！

もともとやりたいことは、ループの切れる角周波数 ($A_{DC}\beta H(\omega_T) = 1$) の位相余裕からオーバーシュートのようすを求めることである。ここまでで位相余裕を ϕ_{PM} とスタガ比 k を与えれば、(T_1 で正規化された) 角周波数 ω_T を得られることは分かった。

しかしこれからダンピング・ファクタ ζ と関連づけるためには、以降のダンピング・ファクタを定義する、式 (17) にある「オープンループ DC ゲイン $A_{DC}\beta$ 」との関係を見つけなければならない。もともとオープンループ DC ゲイン $A_{DC}\beta = \text{const}$ であるから、ここまでの関係から $A_{DC}\beta$ を得ることができる。

求めたいものが位相余裕 ϕ_{PM} とループの切れる角周波数 ω_T とダンピング・ファクタ ζ との関係だったので、 $A_{DC}\beta$ が幾つであっても問題なく、結果としてつじつまが合うように (ϕ_{PM} と ω_T を決めてから) 後に $A_{DC}\beta$ が得られるようにしておけばよい。まず、

$$|A_{DC}\beta H(\omega_T)| = A_{DC}\beta \cos \phi_1 \times \cos \phi_2 = A_{DC}\beta \sqrt{\frac{1}{1 + \omega_T^2}} \sqrt{\frac{1}{1 + (\omega_T/k)^2}} = 1 \quad (14)$$

になればいいわけであり、

$$A_{DC}\beta = \sqrt{(1 + \omega_T^2)[1 + (\omega_T/k)^2]} \quad (15)$$

を満たす $A_{DC}\beta$ として設定すればよいことになる。これで以降に示す「ダンピング・ファクタ ζ 」を計算するのに必要な、全てのパラメータ間の関係を求めることができた。

5 負帰還構成でダンピング・ファクタ ζ の計算を試みる

系を閉じたときの位相余裕 ϕ_{PM} から、その (T_1 で正規化された、オープンループゲインが 1 になる) 角周波数 ω_T での位相遅れ $\phi_T (\phi_T = \pi - \phi_{PM})$ を計算し、これからダンピング・ファクタ ζ を求める。

5.1 閉ループ伝達関数とダンピング・ファクタ ζ

2 次遅れフィードバック系のオープンループゲインは式 (2) のとおり、

$$H_{OL}(s) = A_{DC}\beta \frac{1}{1 + sT_1} \cdot \frac{1}{1 + sT_2}$$

である。途中は割愛するが、

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1 + A_{DC}\beta}{T_1 T_2}} \quad (16)$$

$$\zeta = \frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{(1 + A_{DC}\beta)T_1 T_2}} \quad (17)$$

とくと、このオープンループゲイン $H_{OL}(s)$ のループを閉じたときの閉ループ伝達関数 $H_{CL}(s)$ は

$$H_{CL}(s) = \frac{A_{DC}}{1 + A_{DC}\beta} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (18)$$

この式の2次系の安定度を表すものが式(17)で定義したダンピング・ファクタ ζ であり、この ζ により、波形のオーバーシュートのようすが決定する。

5.2 位相遅れ ϕ_T におけるダンピング・ファクタ ζ を求める

これまで得られたパラメータを式(17)に代入し、ダンピング・ファクタ ζ を得れば目的達成となるわけである。

式(17)の ζ にここまでの計算結果を代入してみると、

$$\zeta(k, \omega_T) = \frac{1}{2\sqrt{1 + \sqrt{(1 + \omega_T^2)}[1 + (\omega_T/k)^2]}} \left(\sqrt{k} + \sqrt{\frac{1}{k}} \right) \quad (19)$$

となる。 $\zeta(k, \omega_T)$ であり k と ω_T の関数になっていることがわかる。つまり k と ω_T が分かれば ζ が求まることになる。なお ω_T は $A_{DC}\beta H(\omega) = 1$ になる、 T_1 で正規化された角周波数であり、式(13)で $\omega = \omega_T, \phi = \phi_T$ とおき、 $\phi_{PM} = \pi - \phi_T$ であることから

$$\omega_T = \frac{-\frac{k+1}{\tan \phi_T} \pm \sqrt{\left(\frac{k+1}{\tan \phi_T}\right)^2 + 4k}}{2} \quad (20)$$

となる。ということで、 ω_T と ω_n とは別ものなので注意ねがいたい。

5.3 一応 ω_n との関係を計算してみる

一応、この式(18)を逆ラプラス変換(部分分数分解して e^t の形にして、時間応答を求める)すると考えて、極を計算してみると、これも解の公式から、

$$\begin{aligned} s &= \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{(2\zeta\omega_n)^2 - 4\omega_n^2}}{2} \\ &= \left(\frac{-2\zeta \pm \sqrt{(2\zeta)^2 - 4}}{2} \right) \omega_n \end{aligned} \quad (21)$$

で ω_n でくれるので、結局は $\omega_n = 1$ のときだけを覚えておけばよく(実際の回路では ω_n でスケールすればよい) ζ だけを考えれば良いことがわかる。

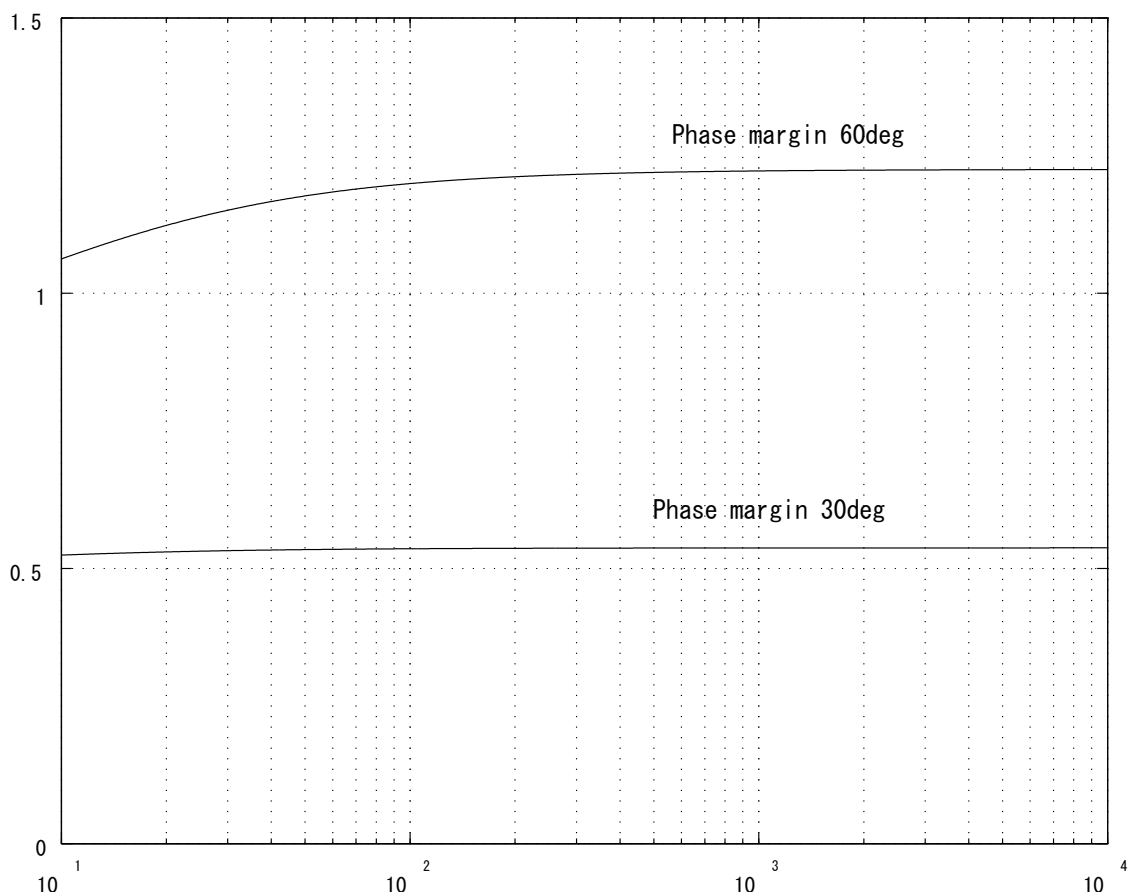


図 2: スタガ比 k (横軸) と ξ (縦軸) の変化のようす。上は位相余裕 60° 、下は 30° 。横軸は見えづらいが左から $k = 10^1$ 、一番右が $k = 10^4$

6 スタガ比 k がダンピング・ファクタ ζ に与える影響度

ここまでで目出度く式 (19) と式 (20) を用いれば、スタガ比 k と位相余裕 ϕ_{PM} とで、ダンピング・ファクタ ζ を求めることができた。一方で、スタガ比 k がダンピング・ファクタ ζ に与える影響度は勘案しておく必要がある。とは言っても、図 2 のように、 k を変えていっても k が 100 以上で十分大きければ、ほとんど ζ は変化が無いことも分かる。

7 得られたダンピング・ファクタ ζ からオーバーシュートの様子を計算する

ここまでの過程により、OP アンプ内部のポールを $T_1 = 1[\text{sec}]$ で正規化し、2 次位相遅れ系の位相余裕を ϕ_{PM} 、スタガ比を k とすれば、その条件で成立する OP アンプの DC ゲイン A_{DC} と帰還量 β を掛けた一巡の DC ゲイン $A_{DC}\beta$ が求まり、これらによりダンピング・ファクタ ζ が計算できることになる。

2 次遅れ系では、ステップ応答 $R(t)$ が (インパルス応答も) ζ により波形表現が異なってくる。一つ一つについて式として示しておきたい。

なお、本来は上記の式 (17) に挙げた変数 ω_n もあるが、以降では簡単化のために (ステップ応答のピーク電圧だけを考えており、時間軸は特に関係が無いので) $\omega_n = 1$ としてある。

7.1 $\zeta < 1$ の場合

この場合がオーバーシュートが出る波形になる。この場合だけがこの記事で重要な項目であるため、このケースのみを考えていけばよい。

$$R(t) = 1 - \frac{\exp(-\zeta\omega_n t)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \phi\right)$$

ただし $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ (22)

7.2 $\zeta = 1$ の場合

この場合はオーバーシュートが出る限界の波形になる。

$$R(t) = 1 - (1 + \omega_n t) \exp(-\omega_n t) \quad (23)$$

7.3 $\zeta > 1$ の場合

この場合はオーバーシュートは出ない。

$$R(t) = 1 - \exp(-\zeta\omega_n t) \left[\cosh\left(\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n t\right) + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \sinh\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n t \right] \quad (24)$$

7.4 ω_n も計算してみる

式(16) から計算される ω_n も紹介しておく。実際は $\omega_n = 1$ としてしまっているの、ここは本稿に対して影響は与えない

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1 + A_{DC}\beta}{T_1 T_2}} = \sqrt{k(1 + A_{DC}\beta)} = \sqrt{k \left(1 + \sqrt{(1 + \omega_T^2)[1 + (\omega_T/k)^2]} \right)} \quad (25)$$

8 MATLAB のプログラム例

```
k = 100 % stagger ratio
phideg = 140 % phase margine is 180 - phideg
phi = pi * phideg / 180;

omega = 0.5 * ((-1 * (k + 1)/tan(phi)) + sqrt(((k + 1)/(tan(phi)))^2 + 4 * k))
Abeta = sqrt((1 + omega^2)*(1 + (omega/k)^2))
zeta = 0.5/(sqrt(1 + sqrt((1 + omega^2)*(1 + (omega/k)^2))))*(sqrt(k) + sqrt(1/k))

t = linspace(0,10, 1000);
phi = atan(sqrt(1 - zeta^2)/zeta);
rt1 = exp(-1 * zeta * t)/sqrt(1 - zeta^2);
```

```
rt2 = sin(sqrt(1 - zeta^2) .* t + phi);
rt = 1 - rt1 .* rt2;
```

```
plot(t, rt)
set(gca, 'ytick', [0:0.1:2])
grid on
```

以下にこのプログラムの実行結果を示す。

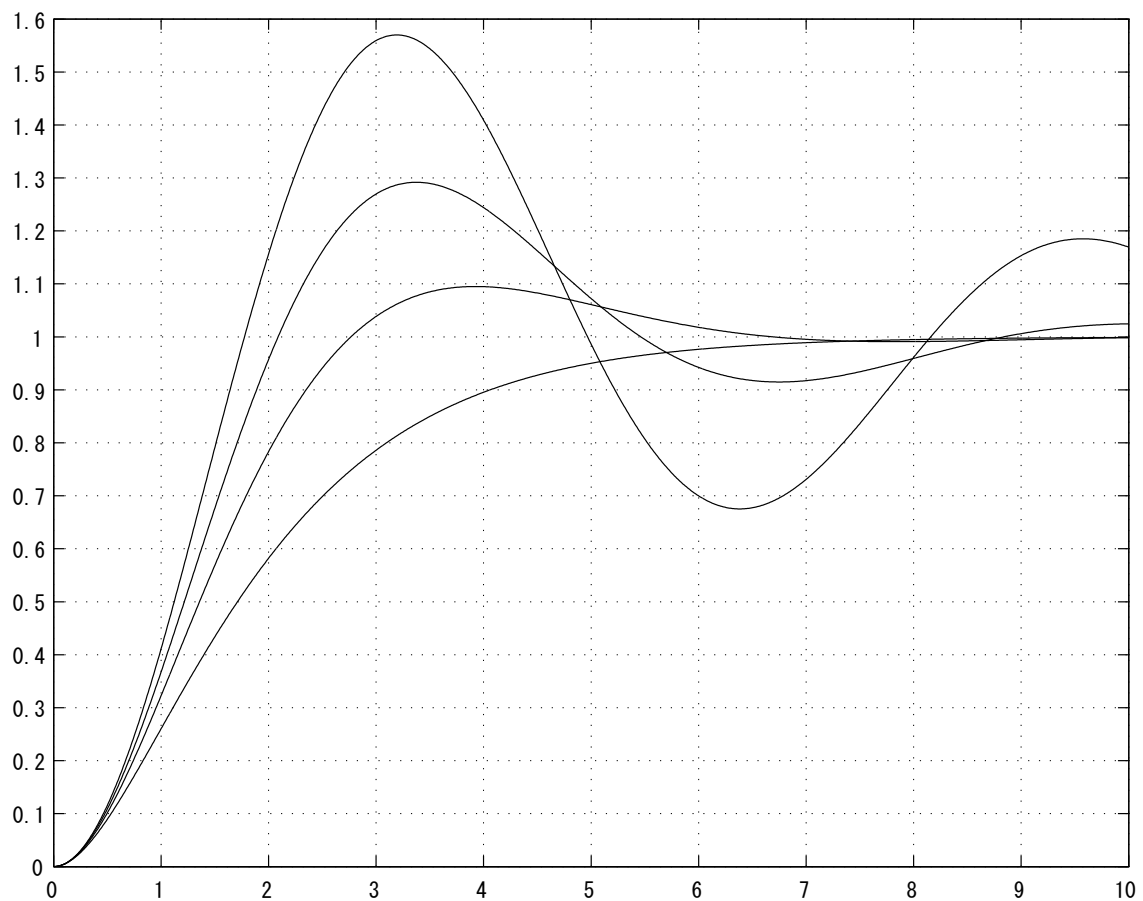


図 3: 上記のプログラムで書いた（複数重ね書きした）ステップ応答波形。上から位相余裕 20° , 40° , 60° , 80°