

「S/N 比=6.02N+1.76DB」、その意味と利用上の注意点

著者：WALT KESTER

はじめに

A/D コンバータ (ADC) や D/A コンバータ (DAC) の S/N 比 (信号対雑音比) を表す式として、「S/N 比=6.02N+1.76dB」を目にする機会は少なくないでしょう。重要なのは、何も考えずにこの式を受け入れるのではなく、その意味を深く理解することです。これを怠ると、ADC/DAC 製品のデータシートに書かれた仕様や実際の性能について、解釈を誤ってしまう可能性をこの式は秘めているからです。この式は、分解能が N ビットの理想的な ADC の性能を表します。この式で求められる S/N 比の理論値と、現実の ADC の S/N 比を比較することで、その ADC の性能について深く理解することが可能になります。

このチュートリアルでは、まず、N ビット ADC の量子化ノイズの理論値について説明します。次に、量子化ノイズの rms 電圧値について述べたうえで、それを使って S/N 比の理論値を表す式を導出します。さらに、オーバーサンプリングが S/N 比に与える効果について解説を加えます。

量子化ノイズのモデル

アナログ信号をデジタル値に変換する際、理想的な N ビット ADC で生じる最大誤差は $\pm 1/2\text{LSB}$ になります (図 1)。振幅が 1LSB 以上のあらゆる AC 信号の量子化ノイズは、ピークツーピークの振幅が q (q は 1LSB の重み) で、いかなる要因とも相関を持たないノコギリ波で近似することが可能です。この近似について別の見方をすると、量子化誤差は、 $\pm 1/2q$ の範囲内にあるどの値も同じ確率で起こり得ると考えることができます。この考え方は厳密に言えば正確ではありませんが、ほとんどのアプリケーションに十分適用できるものです。

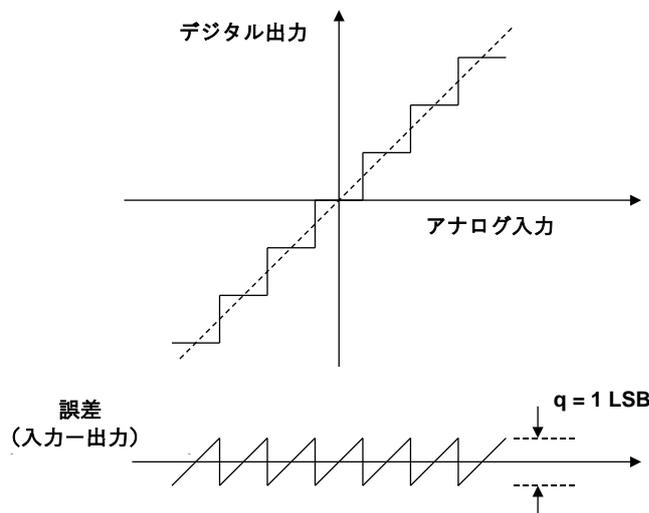


図 1. 理想的な N ビット ADC で発生する量子化ノイズ

アナログ・デバイセズ社は、提供する情報が正確で信頼できるものであることを期していますが、その情報の利用に関して、あるいは利用によって生じる第三者の特許やその他の権利の侵害に関して一切の責任を負いません。また、アナログ・デバイセズ社の特許または特許の権利の使用を明示的または暗示的に許諾するものでもありません。仕様は、予告なく変更される場合があります。本紙記載の商標および登録商標は、それぞれの所有者の財産です。※日本語版資料は REVISION が古い場合があります。最新の内容については、英語版をご参照ください。

ベル研究所の W. R. Bennett 氏は、実際の量子化ノイズについてスペクトル解析を行い、1948年に1つの有名な論文を発表しました（参考文献1）。同氏の詳細な数学的解析によってそれまでの仮定は簡素化され、量子化ノイズは図1のようにシンプルに表せるようになりました。同氏のこの論文以降、ADC/DACのノイズについては数多くの論文や書籍が発表されました（参考文献2～6）。

図2は、量子化ノイズを時間の関数として表したものです。この図でも、十分に正確な解析モデルとして単純なノコギリ波が示されています。このノコギリ波で表される誤差 $e(t)$ は、以下の式1のようになります。

$$e(t) = st, -q/2s < t < +q/2s. \quad (\text{式 1})$$

この $e(t)$ の2乗平均値は次の式2で表されます。

$$\overline{e^2(t)} = \frac{s}{q} \int_{-q/2s}^{+q/2s} (st)^2 dt. \quad (\text{式 2})$$

この式の積分を行い、結果を簡略化したものが次の式3です。

$$\overline{e^2(t)} = \frac{q^2}{12}. \quad (\text{式 3})$$

したがって、量子化ノイズの rms 値（二乗平均平方根値）は次の式4のようになります。

$$\langle \text{量子化ノイズの rms 値} \rangle = \sqrt{\overline{e^2(t)}} = \frac{q}{\sqrt{12}} \quad (\text{式 4})$$

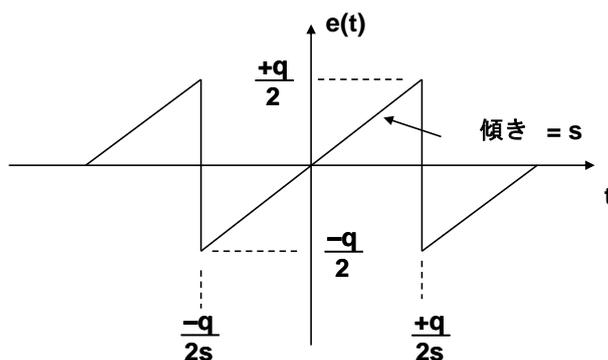


図2. 時間の関数として表した量子化ノイズ

ノコギリ波状の誤差は、ナイキスト領域（DC から $fs/2$ まで。 fs はサンプリング周波数）の外側の周波数帯域に高調波を生じさせます。しかし、高次の高調波はすべてナイキスト帯域内に折り返しとして現れるので、量子化ノイズの総 rms 値は $q/\sqrt{12}$ になります。

Bennett 氏が指摘するように（参考文献1）、量子化ノイズはガウス・ノイズに似たものであり、DC から $fs/2$ までのナイキスト領域全体にほぼ一様に分布します。これは、量子化ノイズは入力信号との間に相関を持たないという条件の下で成り立つことです。というのは、サンプリング周波数が入力信号の周波数の整数倍という特定の条件の下では、量子化ノイズに相関が現れ、入力信号の高調波の周辺にエネルギーが集中するからです。ただ、その場合でも、rms 値は約 $q/\sqrt{12}$ のまま変わりません。

S/N 比の理論値は、フルスケール (FS) のサイン波が入力されると仮定して算出します。入力サイン波は、以下の式 5 で表すことができます。

$$\langle \text{FS の入力サイン波} \rangle = v(t) = \frac{q2^N}{2} \sin(2\pi ft). \quad (\text{式 5})$$

したがって、入力信号の rms 値は次の式 6 のようになります。

$$\langle \text{FS の入力サイン波の rms 値} \rangle = \frac{q2^N}{2\sqrt{2}} \quad (\text{式 6})$$

このことから、理想的な N ビット ADC の S/N 比の rms 値 (SNR) は、以下の式 7~9 のように展開して計算することができます。

$$\text{SNR} = 20 \log_{10} \frac{\langle \text{FS の入力サイン波の rms 値} \rangle}{\langle \text{量子化ノイズの rms 値} \rangle} \quad (\text{式 7})$$

$$\text{SNR} = 20 \log_{10} \left[\frac{q2^N / 2\sqrt{2}}{q / \sqrt{12}} \right] = 20 \log_{10} 2^N + 20 \log_{10} \sqrt{\frac{3}{2}} \quad (\text{式 8})$$

$$\text{SNR} = 6.02N + 1.76 \text{dB}, \quad (\text{帯域幅は DC} \sim \text{fs}/2) \quad (\text{式 9})$$

量子化ノイズの実際のスペクトルを解析するのはかなり複雑で難しい作業です。しかし、Bennett 氏の論文は、式 9 による簡素化した解析でも、ほとんどの目的に対して十分に実用的であることを示しています。ただし、改めて強調しておくべきことがあります。それは、ここまでに示した量子化ノイズの rms 値は、DC から fs/2 までのナイキスト領域全体を対象として計算されているということです。

量子化ノイズの周波数スペクトル

多くのアプリケーションでは、実際の信号の帯域幅 (BW) は、ナイキスト領域よりも狭く設定されます (図 3)。このとき、帯域外 (BW の外側) のノイズ成分をカットする方法として、デジタル・フィルタが使われることがあります。その場合、S/N 比を算出する式には、処理利得 (プロセス・ゲイン) と呼ばれる補正係数を加えることとなります。そうすると、式 10 に示すように、S/N 比の理論値は向上します。

$$\text{SNR} = 6.02N + 1.76 \text{dB} + 10 \log_{10} \frac{f_s}{2 \cdot \text{BW}}, \quad (\text{帯域幅は BW}) \quad (\text{式 10})$$

サンプリング定理によれば、サンプリング後のデータから元の信号を正しく復元するためには、ナイキスト周波数の 2 倍以上のサンプリング周波数を使用すればよいとされています。この本来必要なサンプリング周波数を上回る (通常は整数倍) 周波数でサンプリングを行う手法のことを、オーバーサンプリングと呼びます。デジタル・フィルタ処理を組み合わせたオーバーサンプリングと、量子化ノイズのシェーピング (変調) の 2 つは、シグマ・デルタ ($\Sigma\Delta$) 変調方式の ADC の根幹を成す基本原理として知られています。ただ、オーバーサンプリング自体は $\Sigma\Delta$ 変調だけでなく、どのようなアーキテクチャの ADC にも適用できます。

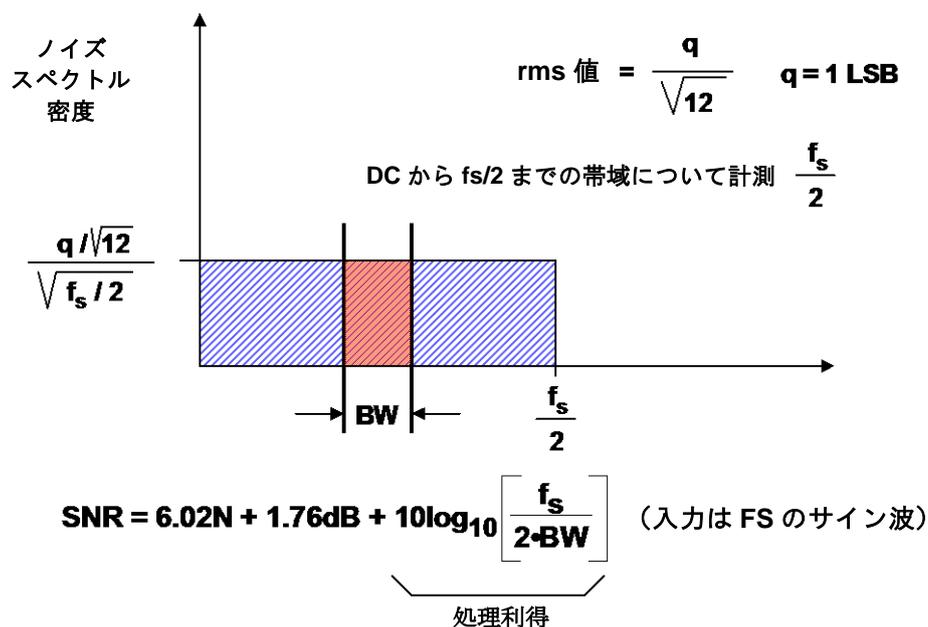


図 3. 量子化ノイズのスペクトル。処理利得を考慮すると S/N 比は向上する。

処理利得の意味は、次の例によって理解できるはずですが、多くの携帯電話の基地局や広帯域無線の受信機では、信号帯域は多くのチャンネルで構成されています。その帯域全体にわたり、アナログ信号は 1 個の ADC によってデジタル値に変換されます。例えば、米国のアナログ携帯電話システムである AMPS の場合、帯域幅が 30kHz の 416 のチャンネルで構成され、約 12.5MHz の帯域を占めることになります。サンプリング周波数を 65MSPS (メガサンプル/秒) とし、帯域幅が 30kHz の各チャンネルをデジタル・フィルタで分離すると仮定すると、オーバーサンプリングによる処理利得は次の式 11 によって求められます。

$$\langle\langle \text{処理利得} \rangle\rangle = 10\log_{10} \frac{f_s}{2 \cdot BW} = 10\log_{10} \frac{65 \times 10^6}{2 \times 30 \times 10^3} = 30.3 \text{ dB}. \quad (\text{式 11})$$

30kHz の帯域幅における S/N 比は、ADC の S/N 比に処理利得を加えた値になります。例えば、使用する ADC の仕様上の S/N 比が 65dB (DC～ $f_s/2$ の値) である場合、(デジタル・フィルタによる適切な処理を行っていれば) 30kHz のチャンネル幅における S/N 比は 95.3dB まで増加するという事です。

4 図はオーバーサンプリングとアンダーサンプリングのアプリケーションを合わせて示しています。この例では、基本信号は、搬送波の周波数 f_c を中心に BW の帯域幅を持っています。サンプリング周波数 f_s は、 f_c よりも低く、基本信号がナイキスト領域の中心に折り返すように選びます。アナログ・フィルタとデジタル・フィルタによって基本信号の帯域外のノイズを適切に取り除けば、処理利得は式 10 のようになります。

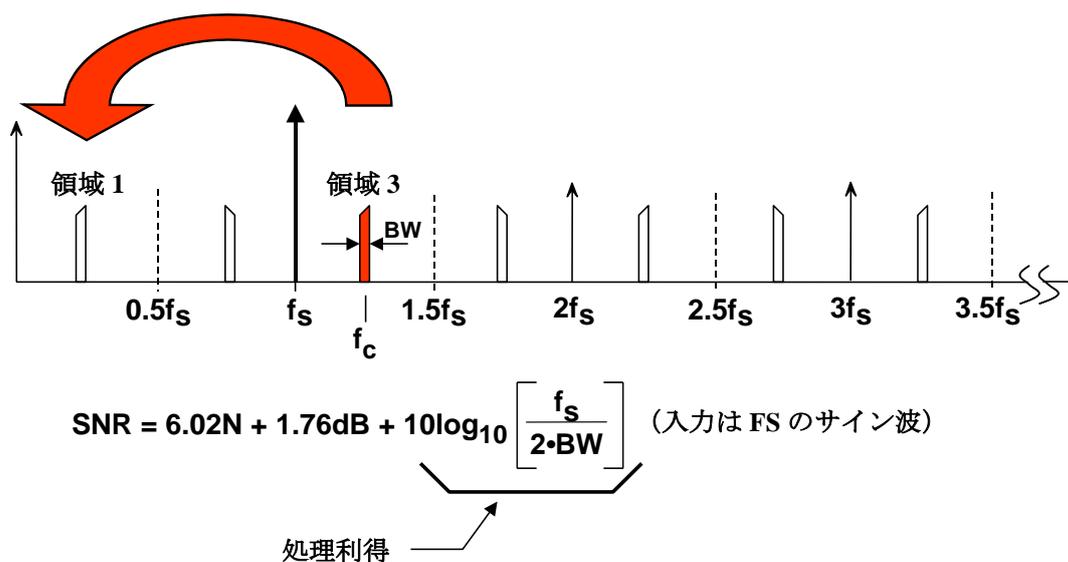


図 4. アンダーサンプリングとオーバーサンプリングを組み合わせた場合の処理利得

量子化ノイズと入力信号の相関が招くミスリード

先述したように、量子化ノイズの rms 値は $q/\sqrt{12}$ に近似されます。ただし、周波数領域で見ると、特定の条件下では量子化ノイズが AC 入力信号と強い相関を持つケースがあります。例えば、振幅の小さい周期的な信号は、振幅の大きいランダムな信号よりも強い相関を示します。多くの場合、量子化ノイズはホワイト・ノイズであり、DC から $f_s/2$ までのナイキスト領域全体に一樣に分布すると仮定されます。しかし、この仮定はすべてのケースで正しいわけではありません。望ましくないことに、強い相関が存在する場合には、量子化ノイズは入力信号の高調波の周辺に集中して現れます。

実際のアプリケーションでは、常にシステムからのノイズが加わるため、ADC の入力は周波数に幅を持つこととなります。そのため、量子化ノイズはランダムになる傾向があります。しかし、スペクトル分析アプリケーションでは（または、単一周波数のサイン波を ADC に入力し、変換結果を FFT で解析する場合には）、サンプリング周波数と入力信号の比に依存して、量子化ノイズと入力信号に相関が現れることに注意しなければなりません。

これについての具体例を図 5 に示しました。この図は、理想的な 12 ビット ADC を使用し、その出力を 4096 ポイントの FFT によって解析した結果です。図 5 (A) の FFT 結果は、2MHz の入力信号周波数に対して、サンプリング周波数をその 40 倍の 80MSPS としています。この場合、SFDR（スプリアスフリー・ダイナミックレンジ。高調波など、基本波以外の最大の周波数成分と基本波の振幅の比率）は約 77dB という結果になっています。それに対し、図 5 (B) では、入力周波数をわずかにずらして 2.111MHz としています。結果を見ると、ノイズのスペクトルは比較的ランダムで、SFDR は約 93dB です。この場合、SFDR は高調波との比ではなく、ノイズフロアにおける“スパイク”との比になっています。いずれの場合も、ノイズ成分全体の rms 値は約 $q/\sqrt{12}$ (S/N 比の理論値は 74dB) ですが、図 5 (A) では入力信号とサンプリング周波数の相関によって、ノイズが基本周波数の高調波部分に集中しているということです。

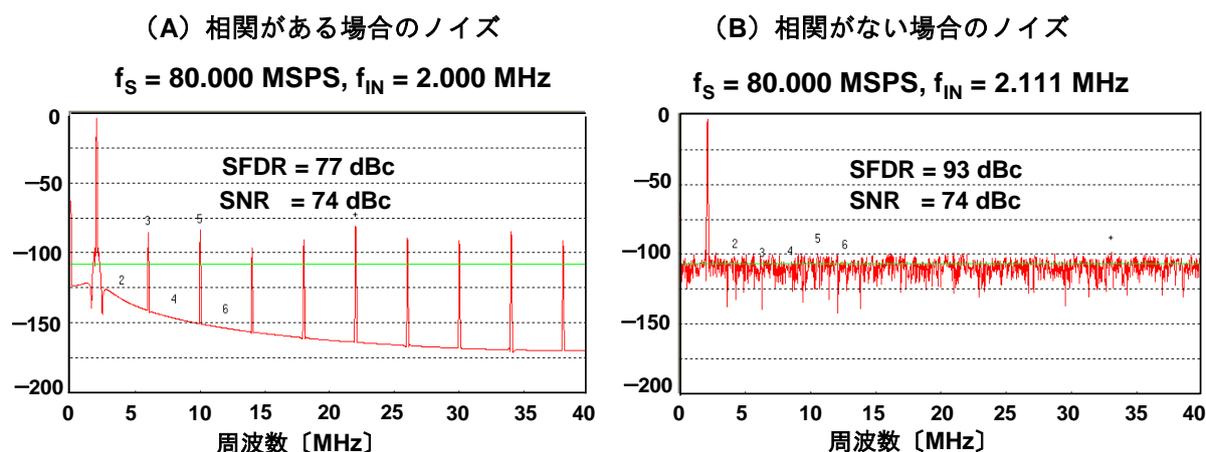


図 5. 理想的な 12 ビット ADC の出力を 4096 ポイントの FFT で解析した結果。サンプリング周波数と入力周波数の比が、量子化ノイズに及ぼす影響を示す例である。(A) は相関がある場合のノイズ、(B) は相関がない場合のノイズを表している。

このように、ADC の高調波歪みに大きな違いが出ているのは、入力信号周波数との相関によって量子化ノイズに影響が及ぶからです。実際の ADC アプリケーションでは、入力信号は広い帯域とランダム性を持ちます。また、一般に少量のシステム・ノイズがディザ信号のように働き、量子化ノイズのスペクトルをさらにランダムなものとしします。そのため、通常は、量子化ノイズはランダム・ノイズとして現れます。

上記の点について理解するのは重要なことです。なぜなら、単一周波数の入力サイン波を使用して ADC の FFT 解析を行う方法は、性能評価の手法として広く普及しているからです。ADC の高調波歪みを測定する際には、相関の影響によって生じた結果ではなく、適切な条件の下で生じる ADC の本来の高調波歪みを正確に測定できるようにしなければなりません。そのためには、周波数比を正しく選択することが必要です。また、場合によっては、入力信号に少量のノイズ（ディザ）を加える方法も検討すべきです。アナログ方式のスペクトラム・アナライザを使って DAC の歪みの測定を行う場合にも、同じ対策を適用することができます。

S/N 比、処理利得、ノイズフロアの関係

図 6 は、理想的な 12 ビット ADC の出力に対して FFT 解析を行った結果をモデル化したものです。FFT 結果のノイズフロアはフルスケールから平均で約 107dB 低い位置にあります。ここで、12 ビット ADC の S/N 比は理論値で 74dB であることに注意してください。FFT 結果のノイズフロアの値が ADC の S/N 比と一致するわけではありません。FFT は、帯域幅が f_s/M (M は FFT のポイント数) のアナログ方式のスペクトラム・アナライザと同じように動作するからです。すなわち、FFT 結果におけるノイズフロアの理論値は、FFT の処理利得によって、量子化によるノイズフロアよりも $10\log_{10}(M/2)$ dB 低い値になります。

S/N 比が 74dB の理想的な 12 ビット ADC について 4096 ポイントの FFT を行った場合、処理利得は $10\log_{10}(4096/2) = 33\text{dB}$ です。したがって、FFT 結果のノイズフロアは $74 + 33 = 107\text{dBc}$ となります。FFT を行う場合、ノイズフロアは FFT のサンプル数を増やすことで下げることが可能です。これは、アナログ方式のスペクトラム・アナライザによる計測において、帯域幅を狭くすることでノイズフロアを下げられるのと同じように考えることができます。FFT を使用して ADC の評価を行う際には、歪み成分とノイズフロアを識別できる程度に FFT のサンプル数を多くとることが重要です。FFT 結果に対して平均化を適用しても、ノイズフロアを下げることはできません。平均化を施しても、個々のノイズ・スペクトル成分の振幅の差が小さくなるだけです。

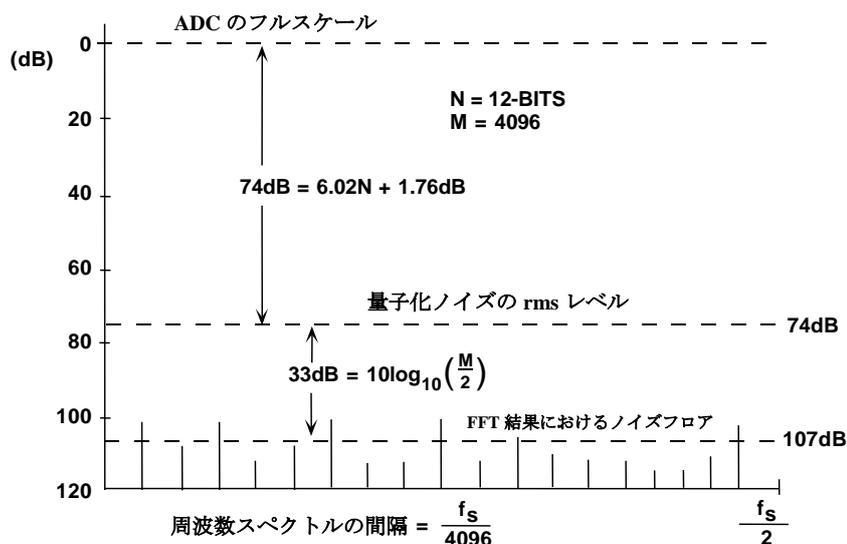


図 6. 理想的な 12 ビット ADC に 4096 ポイントの FFT を適用した結果

参考文献

1. W. R. Bennett, "Spectra of Quantized Signals," Bell System Technical Journal, Vol. 27, July 1948, pp. 446-471.
2. B. M. Oliver, J. R. Pierce, and C. E. Shannon, "The Philosophy of PCM," Proceedings IRE, Vol. 36, November 1948, pp. 1324-1331.
3. W. R. Bennett, "Noise in PCM Systems," Bell Labs Record, Vol. 26, December 1948, pp. 495-499.
4. H. S. Black and J. O. Edson, "Pulse Code Modulation," AIEE Transactions, Vol. 66, 1947, pp. 895-899.
5. H. S. Black, "Pulse Code Modulation," Bell Labs Record, Vol. 25, July 1947, pp. 265-269..
6. K. W. Cattermole, Principles of Pulse Code Modulation, American Elsevier Publishing Company, Inc., 1969, New York NY, ISBN 444-19747-8.
7. Walt Kester, Analog-Digital Conversion, Analog Devices, 2004, ISBN 0-916550-27-3, Chapter 2./The Data Conversion Handbook, Elsevier/Newnes, 2005, ISBN 0-7506-7841-0, Chapter 2.
8. Hank Zumbahlen, Basic Linear Design, Analog Devices, 2006, ISBN: 0-915550-28-1./Linear Circuit Design Handbook, Elsevier-Newnes, 2008, ISBN-10: 0750687037, ISBN-13: 978-0750687034. Chapter 5.